Incontro n.6

1) Quando noi confrontiamo due insiemi di oggetti per stabilire quale dei due ha più elementi attribuiamo ad ogni elemento del primo insieme un numero naturale progressivo e procediamo in modo analogo per il secondo insieme. Se dopo aver contato gli elementi di ciascuno dei due insiemi arriviamo allo stesso numero diremo in matematica che i due insiemi sono **idempotenti** o anche che hanno la **stessa cardinalità**. Se invece ciò non accade diremo che un insieme ha cardinalità maggiore dell'altro (ha un numero di elementi maggiore). La cosa si complica quando gli insiemi hanno infiniti elementi proprio perché la conta non termina mai. Quindi se vogliamo fare dei confronti fra insiemi infiniti dobbiamo procedere in modo diverso: possiamo cioè accoppiare gli elementi dei due insiemi cioé creare una corrispondenza fra gli elementi dei due insiemi. Supponiamo di avere un cestino con delle mele e un gruppo di bambini seduti a tavola. Do ad ogni bambino una mela; i casi sono tre: o finisco le mele e ci sono ancora dei bambini rimasti senza, o avanzo delle mele dopo averne data una per ciascuno o, infine, finisco le mele e tutti i bambini ne hanno una. Nel primo caso l'insieme delle mele ha più elementi di quello dei bambini (cioè ha una cardinalità maggiore), nel secondo caso sono invece le mele ad essere più numerose dei bambini nel terzo caso i due insiemi hanno lo stesso numero di elementi. Potremo quindi dire che due insiemi hanno la stessa cardinalità se è possibile creare una **corrispondenza biunivoca** tra gli elementi dei due insiemi. Per corrispondenza biunivoca si intende un collegamento che ad ogni elemento del primo insieme fa corrispondere un solo elemento del secondo insieme e viceversa.

2) Proviamo ad applicare questo metodo a due insiemi infiniti e, per semplicità cominciamo con l'inseme dei pari e quello dei dispari. Che collegamento possiamo fare ? Sappiamo che i pari li possiamo indicare con **2n** e i dispari con **2n+1** e allora creiamo la seguente corrispondenza 2n -------> 2n + 1
Otterremo le seguenti coppie di numeri $0 \rightarrow 1$ $2 \rightarrow 3$ …. $22 \rightarrow 23$ cioè ogni numero pari è collegato ad un unico numero dispari; vediamo se è vero anche il contrario
$3 \rightarrow 2$ 17--> 16 3189 -->3188 …... e quindi anche ogni dispari è collegato ad un unico pari. La **corrispondenza creata è biunivoca** quindi l'insieme dei pari ha la stessa cardinalità dell'insieme dei dispari cioé sono entrambi infiniti dello stesso tipo. La conclusione sembra piuttosto banale perché l'avevamo probabilmente anticipata.

3) Impresa più impegnativa. Confrontiamo l'insieme N con l'insieme dei numeri pari. E' possibile creare una corrispondenza biunivoca ? Certamente. Pensateci voi. Quindi possiamo concludere che l'insieme dei naturali ha la stessa cardinalità dell'insieme dei pari (o se per questo anche dell'insieme dei dispari). Ma questo è controintuitivo. Viene messa in discussione una verità che nel nostro modo quotidiano di ragionare appare assolutamente scontata. Quale ? Il tipo di infinito dei naturali (dei pari, dei dispari …) è indicato con una lettera dell'alfabeto ebraico $\aleph_0$ (Aleph con zero) che sta ad indicare un infinito numerabile cioè un infinito che è possibile mettere in corrispondenza con i numeri naturali. Molti racconti di Borges fanno riferimento all'Aleph. Quindi concludendo questa prima parte possiamo dire che **card(N) =** $\boldsymbol{\aleph_0}$. A volte la cardinalità dell'insieme N viene anche indicata con i simboli $\bar{N}$ oppure con N racchiuso tra due stanghette verticali.

4) A questo punto proponiamo un problema che è noto come l'hotel di Hilbert. In una località di cui non stiamo a divulgare il nome esiste un Grand Hotel con infinite stanze. Le stanze risultano tutte occupate; arriva un cliente. Secondo voi sarà possibile sistemarlo ?
Siamo nel weekend, le stanze continuano ad essere tutte occupate e arrivano infiniti clienti. L'albergatore, non volendo rinunciare all'introito, studia una soluzione. Sapreste aiutarlo ?

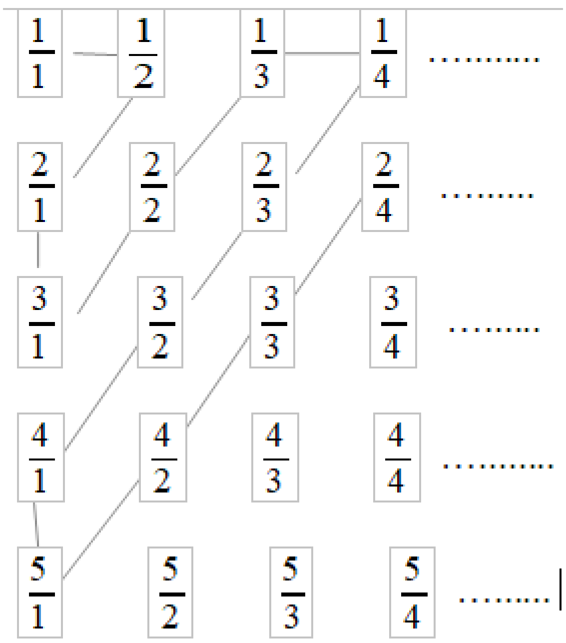
5) A questo punto notiamo un altro fatto interessante; siccome N = $\{pari\} \cup \{dispari\}$ avremo anche che card(N) = card (numeri pari) + card (numeri dispari) cioè $\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0$ cioè sommando due infiniti dello stesso tipo si ottiene ancora un infinito di quel tipo

6) Che rapporto ci può essere tra N e Z ? Z è l'insieme dato da N con l'aggiunta di tutti i numeri negativi. Quindi apparentemente N è un infinito più piccolo di Z ma abbiamo imparato a diffidare. Vediamo se riusciamo a creare una corrispondenza biunivoca tra N e Z. Approfittando della dicotomia pari/dispari potremmo mettere in corrispondenza tutt i numeri pari con i positivi e tutti i numeri dispari con i negativi seguendo il seguente schema
$0 \to 0$ $2 \to 1$ $4 \to 2$ $6 \to 3$ ……. $1 \to -1$ $3 \to -2$ $5 \to -3$ …
Riusciamo a trovare una relazione che dato un numero naturale ci permetta di trovare il corrispondente numero intero (appartenente a Z) ? Verificate quale delle seguenti è possibilmente quella corretta

a) $2n \to n$ $2n+1 \to -n/2$
b) $2n \to n$ $2n + 1 \to -(n+1)$
c) $2n \to -n$ $2n + 1 \to n + 1$

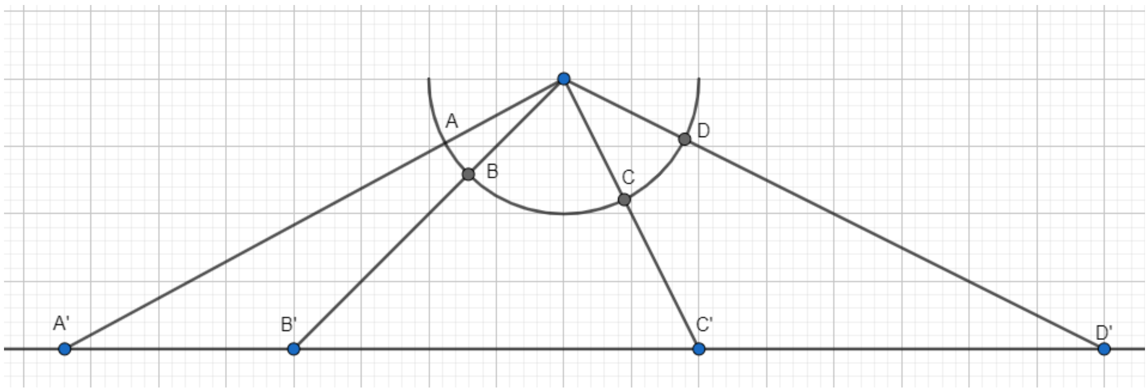
Quindi anche la cardinalità di Z è $\aleph_0$ cioè **anche Z è un infinito numerabile**

6) E' giunto il momento di passare a Q. Se N e Z erano insiemi discreti Q è un insieme denso (se vi ricordate fra due frazioni qualsiasi è possibile inserirne infinite altre.). E' anche giunta l'ora di presentare un personaggio straordinario: si tratta di Georg Cantor matematico tedesco (1845 – 1912) che tra il 1874 e il 1884 diede ordine all'infinito. Internet è piena di notizie su di lui per cui vi rimando alla rete. Cantor dispose le frazioni su righe successive; nella prima riga mise tutte le frazioni con numeratore 1 e denominatore via via crescente; nella seconda riga tutte quelle con numeratore 2 e denominatore via via crescente e così via. Poi, per contarle seguì un motodo che utilizzerà anche in seguito detto della diagonalizzazione



$1/1 \to 1$ $½ \to 2$ $2/1 \to 3$ $3/1 \to 4$ $2/2 \to 5$ $1/3 \to 6$ $¼ \to 7$ $2/3 \to 8$ …
Alla fine tutte le frazioni sono state contate, ad ogni frazione è stato assegnato un numero naturale quindi la cardinalità di Q è anch'essa $\aleph_0$ cioè Q è un insieme infinito numerabile cioè **card(Q) = card(N) = $\aleph_0$**

8) Viene facile pensare che anche R ricalchi la stessa storia cioè in definitiva abbia anch'esso la cardinalità del numerabile. Ma prima di esaminare quest'ultimo passo Cantor premette che non è necessario esaminare tutto R: basterà esaminare un intervallo di R ad esempio quello compreso tra 0 e 1 (estremi esclusi). Perché ?
Perché è possibile creare una corrispondenza biunivoca tra tale segmento e tutta la retta come dimostra la seguente rappresentazione grafica



La semicirconferenza è stata ottenuta utilizzando come lunghezza il segmento 0-1. Noterete come ad ogni punto della semicirconferenza (cioé del segmento) sia collegato un punto della retta; si è quindi creata una corrispondenza biunivoca tra il segmento 0-1 e tutta la retta. Questo sta a significare che la cardinalità del segmento è uguale alle cardinalità di tutta la retta costituita da elementi dell'insieme dei reali

9) Nel suo ragionamento Cantor parte dall'idea che la cardinalità del segmento sia $\aleph_0$ cioè che sia possibile creare una corrispondenza biunivoca fra i punti del segmento e l'insieme dei naturali (in definitiva che sia possibile numerare tutti i punti del segmento). Se è possibile numerare tutti i punti del segmento, è possibile farne una lista infinita, non necessariamente in ordine crescente. Cantor crea una lista di questo tipo

$0,a_1a_2a_3a_4a_5$ ……. → 1
$0,b_1b_2b_3b_4b_5$,,,,,,,, → 2
$0,c_1c_2c_3c_4c_5$ ……. → 3
$0,d_1d_2d_3d_4d_5$ …... → 4
$0,e_1e_2e_3e_4e_5$ ……. → 5
…...................

La lista va avanti all'infinito però a questo punto Cantor ha un'idea geniale: scrive un numero del tipo $0,x_1x_2x_3x_4x_5 \ldots$ con $x_1 \neq a_1$, $x_2 \neq b_2$, $x_3 \neq c_3$ $x_4 \neq d_4$ $x_5 \neq e_5$ e così via. Il numero così prodotto non può essere nell'elenco in quanto ogni sua cifra differisce da un numero della lista in almeno una posizione. Voi direte "e che sarà mai, basta aggiungere questo numero alla lista". Però il procedimento visto prima si può replicare all'infinito e quindi si scopre che non è possibile numerare gli elementi di R. La cardinalità di R non è $\aleph_0$ ma è più grande e viene detta c (cardinalità del continuo): avremo quindi $c > \aleph_0$. **Abbiamo scoperto che gli infiniti numerici non sono tutti uguali ma si possono mettere in ordine**

10) A questo punto rimangono, ad essere ottimisti, un paio di domande. Per prima cosa ci chiediamo se sia possibile costruire degli insiemi che abbiano una cardinalità maggiore di c. L'altra domanda è perché la cardinalità di R è stata chiamata c e non $\aleph_1$?
Per rispondere alla prima domanda è necessaria una premessa.
Partiamo da un insieme A costituito da 3 elementi $A = \{1,2,3\}$ e costruiamo l'insieme delle parti di A cioè l'insieme che ha come elementi tutti i sottoinsiemi possibili di A

$P(A) = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{1{,}2\},\{1{,}3\},\{2{,}3\},\{1{,}2{,}3\},\emptyset\}$ dove l'ultimo simbolo sta a significare l'insieme vuoto cioè quello privo di elementi che, per definizione, è contenuto in tutti gli insiemi. Noterete che il numero di elementi di P(A) è 8 cioè 2^3. Ora è facile vedere come card(P(A)) > card(A). Quandoi si costruisce l'insieme delle parti di un insieme che possiede n elementi la cardinalità di P(A) sarà data da 2^n e quindi sarà sempre maggiore di quella di A. Questo vale anche se l'insieme è infinito. Quindi l'insieme delle parti di R avrà cardinalità $2^{\aleph_0} = \aleph_1 > \aleph_0$. Abbiamo così una regola che ci permette di costruire una catena di infiniti di cardinalità via via maggiore. Contrariamente a quello che si può pensare la cardinalità dei punti del piano (costituito da infinite rette) è sempre c

11) Veniamo ora alla seconda domanda perché c non viene chiamato $\aleph_1$? Questa è la cosiddetta ipotesi del continuo. E' una ipotesi o meglio una congettura perché a tutt'oggi è possibile dimostrarne la verità o la falsità a seconda degli assiomi che si scelgono. Messa in termini semplici non si sa se tra N ed R ci siano altri insiemi numerici tali che la loro cardinalità sia compresa tra $\aleph_0$ e c ovvero se c sia l'infinito immediatamente successivo come cardinalità ad $\aleph_0$. Qui ci fermiamo storditi dall'infinito.
Di seguito aggiungo una bibliografia per chi volesse approfondire l'argomento. I libri sono elencati a seconda del grado di difficoltà ma tale ordinamento è opinabile. Se a qualcuno interessasse qualche testo posso inviarglielo in formato PDF. Grazie per la pazienza

Bibliografia

Rudy Rucker – La quarta dimensione	Molti disegni non troppo difficile
Umberto Bottazzini – Numeri	Ripercorre la storia dei numeri
Dossier delle Scienze – L'infinito (estate 2001)	(dai vari punti di vista)
Rudy Rucker – Infinity and the Mind	(ce l'ho solo inglese) Facile all'inizio poi va fino a Godel
Amir Aczel – The mistery of the Aleph	Collegamenti con la cabala
Paolo Zellini – Breve storia dell'infinito	Complesso con aspetti filosofici
Douglas Hofstadter – Godel, Escher e Bach	Molto lungo ma interessante: si può leggere a pezzi
Haim Shapira – Otto lezioni sull'infinito	Abbastanza semplice e breve con molti esercizi proposti
David Foster Wallace – Tutto e di più	Considerazioni sull'infinito di un grande scrittore. Purtroppo la traduzione italiana ha parecchi errori gravi
Ian Stewart – Visions of Infinity	Capitoli slegati per cui si può scegliere
Morris Kline – La matematica nella cultura occidentale	Da uno storico della matematica un excursus nel mondo dell'arte e della filosofia
Eli Maor – La musica dei numeri	Come dice il titolo collegamenti musica e matematica. Da Pitagora a Schonberg
George Gamow – One, two, three …. Infinity	(ce l'ho solo in inglese). Spazia dalla matematica alla fisica alla chimica
Piergiorgio Odifreddi – Ritratti dell'infinito	L'infinito da diverse prospettive.
Piergiorgio Odifreddi – Il museo dei numeri	Un esame dei vari numeri con aneddoti e riferimenti storici
Peter Rosza – Giocando con l'infinito	Semplice con molti giochi stimolanti
Sergio Givone – Sull'infinito	Taglio decisamente filosofico