5° Incontro

1) Che cos'è una **successione numerica** ? E' una sequenza di infiniti numeri. Noi abbiamo già visto la successione di Fibonacci per la quale la regola è che ogni numero dal terzo in poi è dato dalla somma dei due precedenti. Chiamando a_1 il primo numero e così via avremo
$a_3 = a_2 + a_1$ e, più in generale $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
Quello adottato è un modo ricorsivo per definire una successione nel senso che ogni termine viene definito in base al/ai precedenti
Chiariamo subito che nell'indicazione a_n preferiamo in queste schede partire da n = 1 e non da n = 0 anche se 0 è pur sempre un numero naturale.
Ad esempio per definire la **successione dei numeri pari** potremmo procedere nel seguente modo $a_1 = 0 \quad a_n = a_{n-1} + 2$
Per i **numeri dispari** basterà cambiare il primo termine $a_1 = 1 \quad a_n = a_{n-1} + 2$
<u>Provate a generare i primi termini della successione così definita</u> $a_1 = 1 \quad a_n = 2a_{n-1} + 1$
La successione può essere positiva, negativa o a segni alterni; <u>come definireste per ricorrenza la seguente successione</u> ? 1 -2 +4 -8 +16 -32 …....
Una successione può **convergere** se, andando avanti all'infinito, ci si avvicina sempre di più ad un determinato valore finito, **divergere** se andando avanti i termini della successione diventano sempre più grandi (o sempre più piccoli se negativi) cioè crescono (o decrescono) senza limite. Infine la successione può essere oscillante se di dirige verso più valori. Provate a individuare a quale categoria appartengono le seguenti successioni:
   a) successione dei numeri pari
   b) 1 -1/2 +1/3 -1/4 +1/5 -1/6 +1/7 ….
   c) ½ 2/3 ¾ 4/5 5/6 6/7 …....

2) I termini della successione si possono anche definire mediante una formula che lega il valore di un termine alla posizione occupata. Il vantaggio di questo modo di procedere è che si può immediatamente calcolare qualsiasi termine senza bisogno di calcolare tutti i valori precedenti. Ad esempio per calcolare il generico termine n della successione dei numeri dispari basterà scrivere $a_n = 2n - 1$ (se parto da n = 1 per semplificare le cose). Ad esempio il 20° numero dispari sarà $a_{20} = 39$. Non sempre è facile trovare la formula generale. <u>Provate a trovare una formula generale</u> (si chiama anche formula analitica) per le seguenti successioni
   a) 1 2 4 8 16 32 …...
   b) ½ 2/3 ¾ 4/5 5/6 6/7 …....

3) Noi esamineremo due tipi di successioni: le progressioni aritmetiche e le progressioni geometriche. Nelle progressioni **aritmetiche** ogni termine si ottiene dal precedente **sommando sempre (o sottraendo) lo stesso numero** che viene detto **ragione** e indicato con la lettera d (differenza); nelle progressioni **geometriche** ogni termine si ottiene **moltiplicando il precedente per un numero fissato** detto anche qui ragione e indicato con la lettera q (quoziente). La successione dei pari o quella dei dispari è un tipico esempio di progressione aritmetica con ragione 2. Nelle seguenti successioni <u>individuate quelle aritmetiche e quelle geometriche specificando la ragione</u>
   a) 2 ½ 1/8 1/32 …...
   b) 3 10/3 11/3 4 …......

4) Cerchiamo si trovare delle relazioni che ci permettano di calcolare la somma dei primi n termini di una progressione. Questo è importante perché dovremo poi parlare delle **serie che sono appunto la somma degli infiniti numeri di una successione**.
Chiamando d la ragione di una **progressione aritmetica** avremo
$a_1 \quad a_2 = a_1 + d \quad a_3 = a_1 + 2d \quad a_4 = a_1 + 3d \quad …...... \quad a_n = a_1 + (n-1)d$

per cui indicando con Sn la somma dei primi n termini di una progressione aritmetica avremo $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots a_n$ cioè
$S_n = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d \ldots\ldots + a_1 + (n-1)d$ e, sommando tutti gli a_1 avremo
$S_n = na_1 + d + 2d + 3d + \ldots. (n-1)d = na_1 + d(1 + 2 + 3 \ldots.. + n-1)$ ma il contenuto della parentesi è la somma dei primi n-1 numeri naturali che, usando la **formula di Gauss *** darà

$$\mathbf{S_n = na_1 + n\cdot(n-1)/2\cdot\ d = na_1 +} \frac{n(n-1)}{2} \mathbf{\cdot d}$$

Quindi ad esempio la somma dei primi n numeri dispari per i quali d = 2 ed $a_1 = 1$ varrà

$$S_n = n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n + n^2 - n = n^2$$

Ad esempio la somma dei primi 10 numeri dispari varrà $10^2 = 100$

5) Più importante ai fini del nostro discorso è la somma dei primi n numeri di una **progressione geometrica** avente come primo termine a_1 e come ragione q
$a_1 \quad a_2 = a_1\cdot q \quad a_3 = a_1\cdot q^2 \quad a_4 = a_1\cdot q^3 \ldots\ldots\ldots \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
$S_n = a_1 + a_1\cdot q + a_1\cdot q^2 + a_1\cdot q^3 + \ldots\ldots\ldots + a_1 \cdot q^{n-1}$ (1)
Per calcolare questa somma tutt'altro che semplice procediamo così; moltiplichiamo per q
$q\cdot S_n = a_1\cdot q + a_1\cdot q^2 + a_1\cdot q^3 + \ldots\ldots\ldots a_1 \cdot q^n$ (2)
Sottraiamo ora dalla (1) la (2) ottenendo $S_n - q\cdot S_n = a_1 - a_1 \cdot q^n$ essendosi tutti i termini intermedi cancellati. Raccogliamo $S_n\cdot (1-q) = a_1\cdot(1 - q^n)$ cioé

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \quad \textbf{(formula 1)}$$

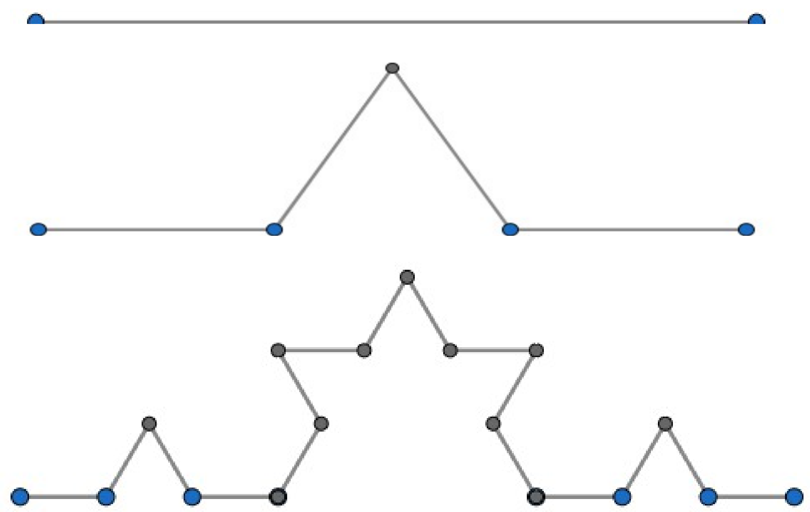
Cosa accade al crescere di n ? Se q < 1 e q positivo, q^n diminuirà progressivamente e al limite tenderà a 0. Cosa vuol dire che al limite tenderà a 0 ? Che prendendo qualunque numero positivo piccolo a piacere riuscirò a trovare un valore n tale che q^n sarà più vicino a 0 del numero prescelto. Quindi si può dire che per n tendente ad infinito $S_\infty = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$
e quindi la **serie** (ripetiamo che si tratta della somma di infiniti numeri) convergerà al numero $a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$ **(formula 2)** sempre se $0 < q < 1$

6) Esaminiamo un paradosso di Zenone utilizzando gli strumenti che abbiamo appena appreso. Zenone di Elea (V sec a.C.) propose il famoso paradosso di Achille piè veloce e la tartaruga. Supponiamo che Achille corra 10 volte più veloce della tartaruga e le dia un vantaggio di 100 metri. Quando Achille raggiunge la posizione da cui è partita la tartaruga avrà percorso 100 metri ma nel frattempo la tartaruga si è spostata di 10 metri (essendo 10 volte più lenta percorre 1/10 della distanza di Achille. Quando Achille ha percorso 110 metri la tartaruga avrà fatto un altro metro. Siccome questo è destinato a protrarsi all'infinito, Achille non raggiungerà mai la tartaruga.
E' come dire che la somma di 100 + 10 + 1 + ………. non potrà mai essre un numero finito. Ma per quanto abbiamo visto si tratta di sommare una serie infinita di termini di una progressione geometrica avente ragione q = 1/10Tale somma varrà $S_\infty = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$ e, ponendo a1 = 100 e q = 1/10 avremo $S_\infty = 100 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 100 \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} \quad 100 \cdot \frac{10}{9} =$

$\frac{1000}{9}$ che corrisponde al numero periodico 111,1111.... Quindi Achille raggiungerà la tartaruga anche abbastanza in fretta. L'equivoco nasce dal fatto che sembra impossibile che la somma di infiniti numeri dia un numero finito. In realtà i paradossi di Zenone avevano per obiettivo di dimostrare l'impossibilità del movimento (come in questo caso) o contro la molteplicità delle cose.

7) Esula dal nostro scopo il prendere in considerazione le serie in generale anche perché l'argomento è notevolmente complesso e non abbiamo il tempo e gli strumenti per affrontarlo. Ci si può limitare ad osservare che condizione necessaria ma non sufficiente affinché una serie converga e che i suoi termini decrescano costantemente. Che non sia sufficiente lo dimostra la serie armonica $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+.......\frac{1}{n}+.......$ che pur avendo termini via via decrescenti diverge cioè diventa infinitamente grande. La condizione diventa anche sufficiente se la serie è a segni alterni.
   Esistono anche delle serie al limite del paradosso come ad esempio 1 -1 +1 -1 +1 -1....che, a seconda del modo in cui eseguo i calcoli può tendere a 0 o a 1.

8) Esaminiamo ora uno strano oggetto "frattale" cioè il frattale di Koch detto anche fiocco di neve. Si parte da un triangolo equilatero di lato x qualsiasi. Si divide poi ciascun lato in tre parti e sulla parte mediana si costruisce un nuovo triangolo equilatero di lato x/3. Si itera il procedimento quante volte si vuole. Qui sotto illustriamo con dei disegni il modo di procedere su un solo lato. Per la costruzione su tutto il triangolo vedere il filmato (**https://youtu.be/_eKXCmh1Dyc**)



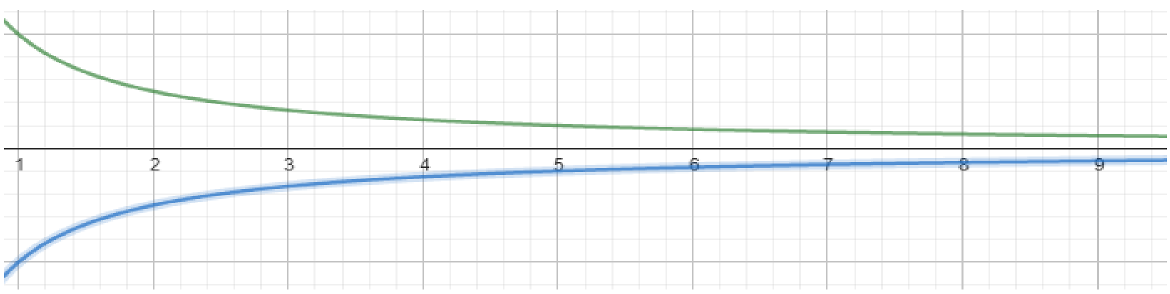
Proviamo a calcolare il perimetro nelle fasi successive detto x ol lato iniziale

Fase 1 Perimetro = 3 x Fase 2 Perimetro = 4 x

Fase 3 Perimetro = $\frac{16}{3}$ x Fase 4 Perimetro = $\frac{64}{9}$ x

La successione dei numeri che rappresentano i perimetri crescono ogni volta di un fattore pari a 4/3; si tratta quindi di una progressione geometrica di ragione 4/3 che quindi diverge. Si può dire che continuando infinite volte la suddivisione il perimetro della figura che otteniamo tende all'infinito. Si può verificare che l'area invece tenderà a 8/5 A dove A è l'area del triangolo iniziale **. Abbiamo quindi una figura di perimetro illimitato ma di estensione l imitata.

9) Un altro esempio di "oggetto strano" è il seguente. Consideriamo un ramo di iperbole (di equazione y = 1/x) nel primo quadrante che va da 1 all'infinito e ruotiamola intorno all'asse



x. Otteniamo un oggetto conosciuto come "tromba di Torricelli" (secondo taluni tromba dell'arcangelo Gabriele) illustrata sopra. Si può verificare utilizzando il calcolo integrale che la superficie di tale solido è infinita mentre il volume è finito e vale esattamente π. ***

10) Abbiamo visto come Gauss ricavò una formula per calcolare la somma dei primi n numeri naturali Σ (somma) = $\frac{n(n+1)}{2}$. Noi abbiamo ricavato questa relazione con un ragionamento "ineccepibile" ma qualche dubbioso (al limite complottista) potrebbe voler verificare la validità di tale formula per qualunque numero naturale n il che richiederebbe una procedura infinita. Come si risolve matematicamente questo problema ? Col metodo di **induzione matematica**. Tale metodo consiste nel verificare che la formula è valida per n = 1 cioé all'inizio dei naturali e poi, supponendola valida per n (dove n è un qualunque naturale) dimostrare che è valida anche per n+1 (cioè per il naturale che viene dopo). Si crea cioè un effetto domino. Essendo la formula valida per n = 1 (primo step) lo sarà anche per n = 2 (che è lo step successivo) e poi per n = 3 e così via all'infinito, Vediamo come si procede nel caso della formula di Gauss. Se n = 1 la somma vale 1 e, in effetti, sostituendo 1 nella formula si ottiene che la somma vale 1 e questo è corretto. Supponiamo ora che sia valida per un n qualsiasi per cui la somma varrà $\frac{n(n+1)}{2}$. Verifichiamo se aggiungendo n+1 a tale risultato si ottiene la stessa espressione che sostituendo n+1 ad n nella formula stessa cioè $\frac{n(n+1)}{2}+n+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ ottenendo $\frac{n^2+n+2\mathrm{n}+2}{2}=\frac{n^2+2\mathrm{n}+n+2}{2}$

* *Se devo sommare i primi n-1 numeri naturali anziché sommarli nell'ordine posso sommare il primo con l'ultimo, il secondo col penultimo .... ottenendo ogni volta n; siccome ho sommato i numeri a due a due la somma dei primi n-1 numeri naturali avrà come risultato* $\frac{n*(n-1)}{2}$ *, la somma dei primi n avrà come risultato* $\frac{n*(n+1)}{2}$

** *L'area di un triangolo equilatero si trova moltiplicando la base (l) per l'altezza* $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}l \text{ con Pitagora}\right)$ *e dividendo per 2 cioè* $A=\left(l^2\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ *Al primo passaggio risulta aumentata di A' = 1/3A in quanto si sono aggiunti 3 triangolini di lato l/3 che va elevato al quadrato; al secondo passaggio c'é un ulteriore aggiunta di* $A''=\frac{4}{27}A$ *(12 triangolini di lato l/9); al terzo passaggio l'aggiunta è* $A'''=\frac{16}{81}A$ *L'area sarà quindi data dalla serie A + A' + A'' + A''' + ... ed essendo A' = 1/3 A, A'' = 4/27 A, A''' = 16/243 A Avremo **AREA** = A +* $\frac{1}{3}A+\frac{4}{27}A+\frac{16}{243}A.....$ *e, raccogliendo* $\frac{1}{3}A$ *a partire dal secondo termine della somma avremo **AREA** =* $A+\frac{1}{3}A\left(1+\frac{4}{9}+\frac{16}{81}+........\right)$ *; ma quella scritta in parentesi è una progressione geometrica di ragione q =* $\frac{4}{9}$ *per cui essendo q < 1 si può utilizzare la formula 2 scritta a pag. 2 ottenendo AREA = A +* $\frac{1}{3}A\left(\frac{1}{1-\frac{4}{9}}\right)$ $=A+\frac{1}{3}A\frac{9}{5}$ $=A+\frac{3}{5}A = \frac{8}{5}A$

*** *Per l'area*

$$\int_1^{\infty} 2\cdot\pi\cdot y\, dx = \int^{\infty} \frac{2\cdot\pi}{x}\, dx = \left(\lim_{x\to\infty} \mathrm{LN}(x)\right) - \mathrm{LN}(1) = \infty$$

Per il volume

$$\int_1^{\infty} \pi\cdot y^2\, dx = \int_1^{\infty} \frac{\pi}{x^2}\, dx = \left(\lim_{x\to\infty} -\frac{\pi}{x}\right) + \pi = \pi$$