4° Incontro

1) Anche la scala musicale pitagorica (vedere slide n.22 delle tassellature) che pure rappresenta una buona approssimazione dei rapporti di frequenza fra le note è stata modificata. Le modifiche possono apparire insignificanti però tali non sono per un orecchio musicalmente preparato. Qual era l'inconveniente dei rapporti razionali ? Che la suddivisione fra semitoni rappresenta una buona approssimazione ma non è esatta. Le cose sembrano funzionare bene nel passaggio da Do-Re (2 semitoni) a Do-Mi (4 semitoni); infatti

   $9/8 \cdot 9/8 = 81/64$ che è la frazione riportata in tabella.

   Come pure per calcolare Do-La (9 semitoni) si possono moltiplicare le frazioni Do-Re (2 semitoni) per Do-Sol (7 semitoni) oppure Do-Mi (4 semitoni) per Do-Fa (5 semitoni) ottenendo la stessa frazione

   $$9/8 \cdot 3/2 = 81/64 \cdot 4/3 = 27/16$$

   Il problema emerge quando cerco di coprire tutta l'ottava; infatti essendo 12 i semitoni dovrei moltiplicare 9/8 per se stesso 6 volte oppure (il che è lo stesso) 81/64 per se stesso 3 volte $\left(\frac{9}{8}\right)^6 = \frac{531441}{262144} = 2{,}02729$

   Il risultato come si vede è leggermente superiore a 2.

   E' stato così introdotto il sistema temperato o equabile in cui il rapporto fra ogni semitono è stato posto uguale alla $\sqrt[12]{2}$ (vedere slide n.6 degli irrazionali). Naturalmente questo falsa leggermente la percesione degli accordi nella musica barocca o antecedente concepita con il vecchio sistema per cui alcuni strumenti come organo e clavicembalo hanno mantenuto la vecchia accordatura.

Accordo	Rapporto pitagorico		Scala temperata
Do	1:1	1	1
Re (2 semitoni)	9:8	1,125	1,1225
Mi (4 semitoni)	81:64	1,2656	1,2599
Fa (5 semitoni)	4:3	1,3333	1,3348
Sol (7 semitoni)	3:2	1,5	1,4983
La (9 semitoni)	27:16	1,6875	1,6818
Si (11 semitoni)	243:128	1,8984	1,8877
Do (12 semitoni)	2:1	2	2

2) I numeri che abbiamo visto finora sono irrazionali algebrici cioè sono numeri che si trovano risolvendo delle equazioni. L'equazione $x^2 = 2$ ha come una delle soluzioni proprio $x = \sqrt{2}$ l'altra equazione che abbiano visto $x^2 - x - 1 = 0$ ha come soluzione Φ (ma non solo). Ci sono però numeri irrazionali che non sono algebrici cioè non sono soluzione di un'equazione. Tali numeri vengono chiamati trascendenti. Un esempio di numero trascendente è dato da π che è dato dal rapporto fra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro. La calcolatrice dà la seguente approssimazione $\pi = 3{,}141592654....$ che noi normalmente abbreviamo in 3,14. Esistono anche per π degli algoritmi che permettono di approssimarlo con delle frazioni continue anche se sono piuttosto complessi. Più semplice il seguente algoritmo che rappresenta una serie a segni alterni; quanti più termini si sommano tanto più ci si avvicina a π .

   $$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} ....$$

Tale serie è molto facile da ricordare ma ha il difetto che **converge molto lentamente,** cioé occorrono molti termini per avvicinarsi al valore effettivo. Pensate che in questo caso per essere sicuri della seconda cifra decimale occorrono 627 termini Quindi un algoritmo per essere efficace deve anche essere abbastanza veloce pur tenendo conto che al computer tutto diventa più facile

Sulla irrazionalità di π si basa l'impossibilità di risolvere il problema della quadratura del cerchio (trovare un quadrato che abbia la stessa area di un cerchio).

3) Un altro numero irrazionale trascendente è il numero di Nepero “e” che, approssimato, vale 2,718281828 che sembrerebbe periodico se non che proseguendo si ha un 4 che vanifica la speranza. Senza entrare troppo nei dettagli collegherei questo numero ad un oggetto del passato: l'interesse bancario. Parleremo nello specifico dell'interesse composto cioè del montante M (capitale+interesse) che matura anno per anno

$M_1 = C \cdot \left(1+\frac{i}{100}\right)$ $\qquad M_2 = M_1 \cdot \left(1+\frac{i}{100}\right) = C \cdot \left(1+\frac{i}{100}\right)^2$ e, più in generale

$$M_n = C \cdot \left(1+\frac{i}{100}\right)^n \quad \text{dopo n anni.}$$

Ad esempio se il tasso di interesse annuo fosse del 10%, dopo 10 anni avrei maturato un montante che è $M10 = C \cdot 2{,}5937...$ cioè il mio capitale iniziale sarebbe 2 volte e mezza quello di partenza.

Alberto ha un'idea geniale: se faccio in modo che il mio interesse maturi ogni mese o, meglio ancora ogni giorno, chissà come diventa enorme il mio montante. Mensilmente indicando con M_{120} (in 10 anni ci sono 120 mesi) vale $M_{120} = C \cdot \left(1+\frac{i}{1200}\right)^{120} = 2{,}707\ C$

Alberto e deluso e prova ad accorciare le scadenze facendo maturare l'interesse ogni secondo. Ottiene così $C \cdot 2{,}7182813..$ A questo punto Alberto abbandona e fa bene anche perché volendo esprimere la situazione con un linguaggio matematico avremmo

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{con } e = 2{,}718281828.....$$

4) Vi sarete accorti che stiamo affrontando due tipi diversi di infinito. Da un lato l'infinitamente grande - pensate all'insieme dei naturali o alle tassellature - d'altro canto l'infinitamente piccolo. Ci siamo sforzati di inserire infinite frazioni fra due punti della retta suddividendo infinite volte un intervallo, abbiamo scoperto il problema che ci poneva radice 2 dove anche la suddivisione in infinite parti sempre più piccole non risolveva la questione della incommensurabilità. Nel primo dei due casi si parla di **infinito** (nell'accezione del crescere senza limiti) nel secondo caso di **infinitesimo** (suddivisione illimitata in parti sempre più piccole) . Vedrete nelle slide degli esempi di tassellature di Escher (sempre lui) che, contrariamente a quelle già viste ripropongono sempre lo stesso modulo ma su scala via via decrescente/crescente

5) ***** <u>**S**e non siete particolarmente interessati ai modelli fisici saltate pure la parte che segue senza problemi per il prosieguo.</u>
Vediamo cosa pensa la fisica dell'infinitamente piccolo. Qui è davvero difficile orientarsi. Si comincia con Democrito (400 a.C.) che suppone la materia divisibile fino ad un certo punto, solo fino a raggiungere il costituente elementare indivisibile battezzato Atomos. Poi più niente si muove in modo significativo fino alla fine dell'800. Per evitare di fare un lungo e tedioso elenco delle scoperte susseguitesi e arrivare direttamente alla situazione attuale vi

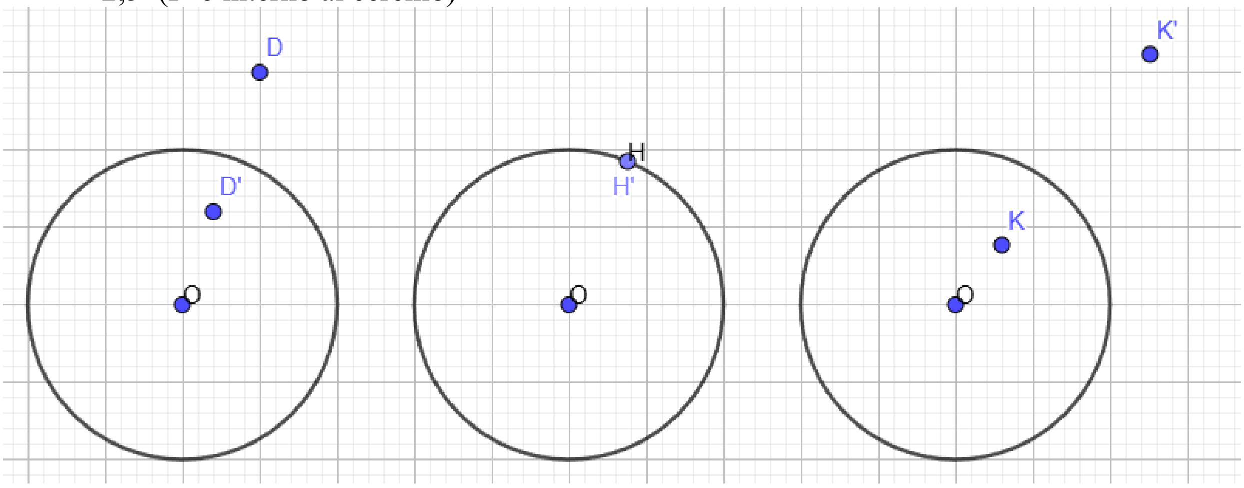
rimando al seguente video
https://youtu.be/1AFR1H6jlO8
nel quale sono riassunte le particelle sin qui scoperte organizzate secondo la teoria che oggi va per la maggiore che è quella del **modello standard**. Ci sono 12 particelle che sono alla base della costituzione della materia (6 adroni e 6 leptoni) e altri 5 particelle che sono i cosiddetti "messaggeri" cioè quelle particelle che rendono possibili le varie interazioni.
Per capire come la situazione sia aggrovigliata vi riporto il seguente breve estratto dal libro di Carlo Rovelli "Sette brevi lezioni di fisica" (pag.21)
"*Il modo in cui queste particelle si muovono e la loro natura sono descritti dalla meccanica quantistica. Queste particelle non sono quindi veri sassolini, sono piuttosto i «quanti» di corrispondenti campi elementari, così come i fotoni sono i «quanti» del campo elettromagnetico. Sono delle eccitazioni elementari, di un substrato mobile simile al campo di Faraday e Maxwell. Sono minuscole ondine che corrono. Che spariscono e ricompaiono secondo le strane regole della meccanica quantistica, dove ciò che esiste non è mai stabile; non è che un saltare da un'interazione all'altra.*"
Naturalmente la teoria quantistica fa a pugni con l'interazione gravitazionale al punto che Einstein parlando della meccanica quantistica usò la frase "Dio non gioca a dadi". Quindi ci attendono nuovi clamorosi sviluppi. L'Universo è nato da un punto (una singolarità) come sostiene la teoria del Big Bang ? L'Universo è al momento attuale in espansione ma esiste un tipo di materia detta materia oscura che ne costituisce la maggior parte ? Esiste anche una energia oscura ?

6) Visto che abbiamo cominciato con Democrito un paio di notizie sulle considerazioni filosofiche concernenti l'infinito. Non prendete per oro colato quanto dirò visto che le mie conoscenze in campo filosofico sono praticamente nulle. Per gli antichi l'infinito detto apeiron era secondo Anassimandro (610-546 a.C.) l'origine di tutte le cose prima che un qualche evento ne avesse provocato la separazione mentre secondo Aristotele (383-322 a.C.) l'Universo era finito per poter mettere la Terra al centro. Aristotele accetta l'idea dell'infinito potenziale cioè della possibilità di andare sempre "oltre" facendo però dei passi finiti. Ad esempio fissato un qualunque numero naturale posso sempre proseguire la successione aggiungendone uno o una quantità finita ma non posso concepire contemporaneamente tutti gli infiniti numeri naturali. Si potrebbe anche pensare all'infinito potenziale come alla **possibilità** di suddividere un insieme finito (ad es. un segmento) in parti sempre più piccole quindi associandolo ad un infinitesimo. Vedremo nel 5° incontro, quando daremo un'occhiata un po' più approfondita alle successioni e alle serie, alcuni paradossi proposti dal filosofo Zenone di Elea (489-431 a.C.)
Aristotele introduce l'infinito nel tempo e nella generazione degli uomini». Questo tema, comunemente indicato come quello dell'«eternità del mondo» (il mondo è sempre esistito), susciterà numerose obiezioni, soprattutto da parte dei paladini delle religioni rivelate. Senza scendere nei dettagli la critica principale riguardava il fatto che se il mondo fosse eterno, la üsua durata sarebbe infinita e tuttavia crescerebbe giorno dopo giorno; ma siccome l'infinito è una grandezza che non può essere ulteriormente accresciuta, nell'eternità del mondo c'è un paradosso. <u>Ricordatevi di questo ragionamento perché lo riprenderemo nell'ultimo incontro.</u>

7) La geometria ci ha aiutato ad avere un'idea di infinito con le tassellature che ci portano ad espandere dei moduli in modo da ricoprire un piano. Vediamo come la stessa geometria possa portare l'infinito nel finito. Fino all'inizio del XV secolo i pittori ignoravano totalmente la prospettiva e non tentavano di rappresentare la terza dimensione ovvero la profondità. Fu in Italia all'inizio del 1400 che il poliedrico Leon Battista Alberti scrisse un trattato sulla prospettiva applicato da Masaccio e successivamente da Piero della Francesca, Leonardo da Vinci e Albrecht Dürer. Senza entrare troppo nei dettagli ci limiteremo a un paio di esempi di **prospettiva centrale** che porta tutte le rette perpendicolari al piano frontale a confluire in un punto detto proprio punto di fuga. Abbiamo quindi rette parallele che si incontrano all'infinito, rettangoli e quadrati che diventano trapezi e triangoli, etc.

Basta pensare a quello che accade in una foto ad un viale alberato perpendicolare rispetto all'obiettivo. Alcuni esempi di prospettiva verranno presentati nelle slides.

8) Tra gli altri metodi per portare l'infinito nel finito ricordiamo l'**inversione circolare** che porta tutti i punti esterni ad una circonferenza assegnata all'interno della stessa. Se il punto è interno verrà proiettato all'esterno mentre se appartiene alla circonferenza resta dov'è. Detto P il punto di partenza, P' quello proiettato ed O il centro della circonferenza la relazione che permette tutto questo è la seguente $PO \cdot P'O = r^2$, dove r indica la misura del raggio. Ricavando P'O avremo $P'O = r^2/PO$. Ad esempio se r = 5, PO = 10 (P è esterno) P'O = 25/10 = 2,5 (P' è interno al cerchio)



Cosa succede a un punto che si trova ad una distanza infinita dal centro (ad esempio al punto all'infinito di una retta ? Cioè cosa accade alla frazione r^2/PO quando PO diventa infinitamente grande ? Più PO aumenta più la frazione diminuisce quindi quando PO tende all'infinito la frazione tende a 0 cioè il punto P' tende a coincidere con il centro della circonferenza: Tradotto in linguaggio matematico il limite di una frazione (avente per numeratore un numero qualsiasi) tende a 0 quando il denominatore tende a infinito. Al contrario quando il denominatore tende a 0 la frazione tende all'infinito.
Basandosi su questo le rette che passano per il centro non subiscono modifiche globali (anche se i punti si disporranno in modo diverso) e quindi sono invarianti. Le rette esterne che non passano per il centro si trasformano in circonferenze interne interne che passano per il centro; le circonferenze esterne si trasformano in altre circonferenze interne più piccole non passanti per il centro. Circonferenze che intersecano quella di riferimento si trasformano in altre circonferenze e, se passavano per il centro diventano della retta mentre il centro della circonferenza diventa un punto esterno all'infinito. Infine se la circonferenza è perpendicolare a quella di riferimento si trasforma in se stessa. *Vedere le slides*