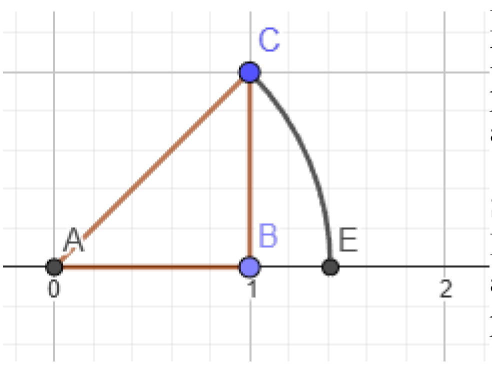
3° Incontro

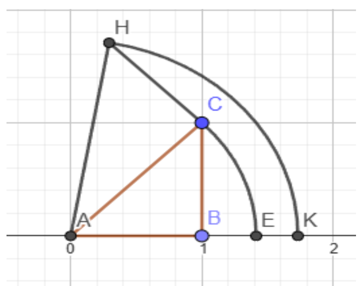
1) <u>Provate a dare voi un esempio di numero irrazionale</u> cercando anche di produrre una regola per generare le cifre successive

2) Esistono dei numeri decimali che non siano limitati e/o periodici? I pitagorici erano convinti che tutte le grandezze si potessero esprimere come rapporto fra numeri naturali. Crollo delle certezze pitagoriche davanti alla diagonale di un quadrato di lato 1.
Infatti tale diagonale misura $\sqrt{2}$ il cui valore approssimativo dato da una calcolatrice è 1.4142135623730950488... ed essa non può essere espressa sotto forma di frazione (vedremo fra poco la dimostrazione) perché non è un numero periodico. Detto così uno può pensare "...pazienza, ce ne faremo una ragione". In realtà tale fatto mina alla base non solo le certezze pitagoriche ma anche le nostre. Infatti significa che, per quanto io divida il lato del quadrato in parti sempre più piccole mettendo tali parti una accanto all'altra non riuscirò mai ad arrivare esattamente alla fine della diagonale.
Se dividiamo il lato in 10 con 14 segmentini arriviamo corti e con 15 superiamo la diagonale
Se la divisione è per 100 con 141 corti e con 142 superiamo
Se la divisione è per 1000 con 1414 corti e con 1415 superiamo
Se la divisione è per 1000000 con 1414213 corti e con 1414214 superiamo
Se la divisione è per un miliardo con 1414213562 corti e con 1414213563 superiamo

3) Dimostrazione che **radice 2 non è un numero razionale**. Tesi da dimostrare: non esiste alcuna frazione che possa rappresentare $\sqrt{2}$. Ragioneremo per assurdo (lo abbiamo già fatto per dimostrare che i numeri primi sono infiniti) cioè neghiamo la tesi e se arriviamo a qualcosa di contradditorio vorrà dire che era sbagliato negare la tesi e quindi la tesi era vera. Negando la tesi supponiamo che esista una frazione ridotta ai minimi termini (cioè numeratore e denominatore non hanno divisori in comune) che è uguale a $\sqrt{2}$
$\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ Eleviamo entrambi i membri al quadrato $2=\frac{a^2}{b^2}$ e, mettendo a moltiplicando entrambi i lati per b^2 otterremo $2b^2 = a^2$ (1)
da cui si desume che a^2 sia pari essendo un multipli di 2; ma se a^2 è pari anche a è pari. Ricordando quanto abbiamo detto a proposito dei pari a si può scrivere $a = 2n$. Sostituiamo a con 2n nella relazione (1), avremo $2b^2 = (2n)^2$ cioé $2b^2 = 4n^2$ e, semplicando per 2 avremo che $b^2 = 2n^2$. Ma allora anche b^2 è pari e di conseguenza b è pari. Ma se sia a che b sono numeri pari vuol dire che la frazione a/b non era ridotta ai minimi termini e quindi siamo arrivati ad una contraddizione.

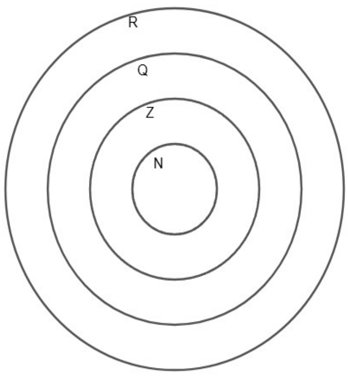
4) 

Dove andremo a mettere $\sqrt{2}$ sulla retta visto che ha infinite cifre non periodiche ? Possiamo procedere con una costruzione geometrica. Qui accanto è rappresentata la costruzione. AC = AE = $\sqrt{2}$
Si traccia un triangolo rettangolo con AB = BC = 1. La diagonale misura $\sqrt{2}$; puntando in A con apertura del compasso pari ad AC si individua il punto E tale che AE = $\sqrt{2}$



Volendo trovare a quale punto corrisponde $\sqrt{3}$ sulla retta, si può ripetere la costruzione del triangolo avente per lati $\sqrt{2}$ (AC) e 1 (CH). L'ipotenusa di detto triangolo avrà lunghezza $\sqrt{3}$ e potrà nuovamente essere portata sulla retta numerica puntando in A con apertura AH individuando il punto K che rappresenta appunti $\sqrt{3}$

I punti E e K che corrispondono a $\sqrt{2}$ e a $\sqrt{3}$ erano necessariamente vuoti e vengono occupati da due numeri che non sono razionali. Quindi l'insieme dei razionali non occupava tutta la retta; i numeri irrazionali (con infinite cifre non periodiche) vanno quindi a riempire i vuoti della retta. L'insieme R che contiene Q e in più gli irrazionali risulta quindi essere continuo. Anche qui la solita domanda: come confrontare gli infiniti insiemi numerici infiniti che abbiamo elencato ? Sono infiniti tutti della stessa "forza" o è possibile stabilire tra loro una gerarchia ?



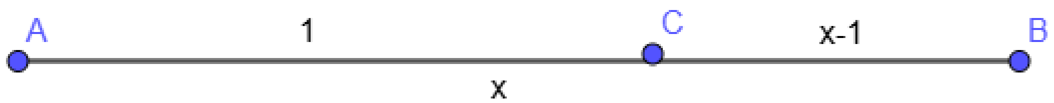
4) Sorge spontanea una domanda. Per i numeri periodici è possibile una scrittura che preveda esattamente quali cifre vadano ad occupare quali posti. Ma come fa il computer prevedere anche migliaia di cifre dopo la virgola di un numero irrazionale come $\sqrt{2}$? Che tipo di "algoritmo" segue ? Qui di seguito diamo un algoritmo "iterativo" cioè che è possibile ripetere quante volte si vuole e che fornisce delle approssimazioni di $\sqrt{2}$ via via più precise e che prende il nome di frazione continua. In una nota al fondo di questi appunti è descritta la procedura per ricavare questo algoritmo (per chi non è debole di stomaco) **

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}$$

Nella iterazione ci si può fermare a qualunque 2; se mi fermo al primo 2 avrò $\sqrt{2}=1+\frac{1}{2}$ cioè 1,5 appross. per eccesso
al secondo 2 avrò 7/5 = 1,4 appross. per difetto
al terzo 2 otterrò 17/12 = 1,416 per eccesso
al quarto 2 si ha 41/29 = 1,413 per difetto
al quinto 2 si ha 99/70 = 1,41428 per eccesso
al sesto 2 si ha 239/169 = 1,41420 per difetto

Noterete come, progressivamente ci stiamo avvicinando al valore approssimativo dato dalla calcolatrice. Questa frazione continua si può sintetizzare nella forma (1,222222...) che dà in un senso della periodicità anche se non è la periodicità dei numeri periodici

5) Un altro numero irrazionale è il **rapporto aureo detto anche sezione aurea** che si indica con Φ. Si divide un segmento qualsiasi in due parti in modo tale che in una proporzione l'Intero segmento stia alla parte più grande come la parte più grande sta alla parte più piccola



Chiamiamo x tutto il segmento, 1 la parte più grande e 1 – x la parte più piccola. Seguendo la definizione potremo scrivere:

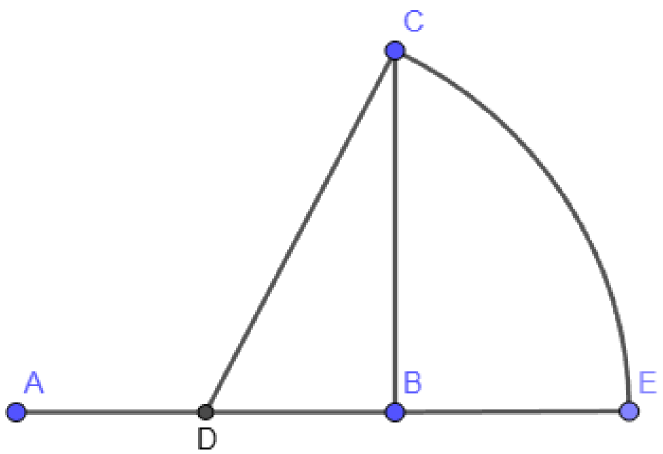
$$x : 1 = 1 : (x - 1)$$

Applicando la proprietà fondamentale delle proporzioni (il prodotto degli estremi è uguale al prodotto dei medi si avrà $x \cdot (x - 1) = 1 \cdot 1$ cioè $x^2 – x = 1$ che riscritto mettendolo in ordine diventa $x^2 – x - 1 = 0$. Questa è una equazione di secondo grado che si risolve con una formula risolutrice elencata a fondo pagina * e dà come risultato x = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

* *La formula risolutrice dell'equazione* $ax^2 + bx + c = 0$ *è* $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Abbiamo scelto come simboli x per il segmento e 1 per la parte più lunga perché così il rapporto aureo Φ è proprio x/1 cio x. Nel risultato compare un radice ($\sqrt{5}$) e noi abbiamo già imparato a diffidare delle radici per cui anche il rapporto aureo sarà un numero irrazionale (infinite cifre non periodiche). Una approssimazione della calcolatrice dà il numero Φ = 1,618033989... Il rapporto aureo si ritrova in natura ed stato molto usato in arte (vedere diapositive e filmato).
Anche Φ può essere rappresentato con una frazione continua del tipo (1,1111111..) che produce le frazioni 3/2, 5/3, 8/5 che approssimano Φ una volta per difetto e la successiva per eccesso. Ma non è necessario ricorrere alle frazioni continue. Avete mai sentito parlare della successione di Fibonacci ? 1 1 2 3 5 8 13 21 34 47 81 128 ….. Ogni numero a partire dal terzo si ottiene sommando i due numeri precedenti. Ora, se guardate bene, il rapporto fra due numeri consecutivi dà proprio le frazioni che si ottengono col metodo della frazione continua. Quindi c'è un collegamento stretto fra la successione di Fibonaccie la sezione aurea Φ. La successione di Fibonacci ha norevoli riscontri in natura

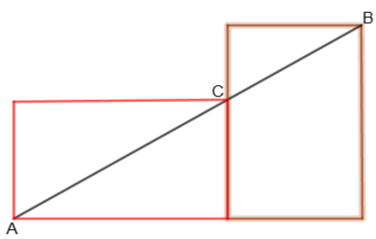
6) Come costruire le due parti di un segmento tali che il loro rapporto sia la sezione aurea ?



Partite da un segmento AB, trovate il suo punto medio D, costruite BC uguale ad AB e ad esso perpendicolare. Unite D con C e, puntando il compasso in D tracciate l'arco CDE dove E si trova sul prolungamento di AB. Riuscireste a dimostrare che il rapporto tra AB e BE corrisponde al rapporto aureo ?

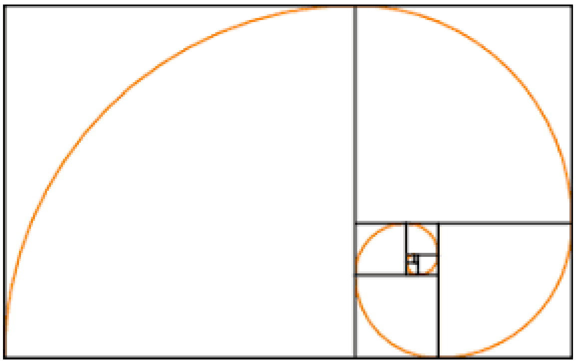
7) Noi abbiamo sotto gli occhi quasi quotidianamente degli oggetti basati sul rapporto aureo; le nostre carte di credito, patenti, carte di identità sono dei rettangoli per i quali il rapporto fra il lato più lungo e quello più corto è proprio Φ (all'incirca). Tali "rettangoli aurei" si prestano ad alcune considerazioni interessanti:

a)



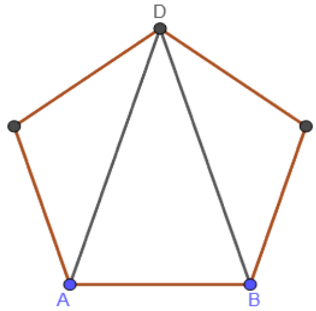
Se mettete due carte di credito accostate come in figurala diagonale che unisce i due vertici A e B passa obbligatoriamente per il vertice C. Secondo voi perché ?

b) Dentro un rettangolo aureo potete individuare un quadrato costruito sul lato più corto. Se togliete questo quadrato troverete un altro rettangolo aureo. Potete continuare a operare in questo modo e avrete una successione di infiniti rettangoli aurei. Tracciando in ogni quadrato il quarto di circonferenza che ha per estremi i vertici opposti otterrete la spirale aurea



c) Anche il rapporto fra la diagonale e il lato di un pentagono corrisponde al rapporto aureo

$$\frac{AD}{AB} = \Phi$$



** *Per ricavare la frazione continua che approssima* $\sqrt{2}$ *si può procedere nel seguente modo*

$\sqrt{2}-1=\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)}=\frac{2-1}{1+\sqrt{2}}=\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ *se spostiamo il -1 dall'altra parte dell'uguale avremo*

$\sqrt{2}=1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ *. A questo punto basta sostituire a* $\sqrt{2}$ *che appare a denominatore quanto trovato e poi continuare ogni volta a sostituire* $\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{1+1+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}$

I filmati presentati sono reperibili su YouTube ai seguenti indirizzi
https://youtu.be/Oh_uGoUfLWA
https://youtu.be/3WCGMleuySs