1° incontro sull'infinito
Numeri naturali

Sono i numeri che usiamo per contare. Per comodità inseriamo in questo insieme numerico anche lo 0 (usato per la prima volta in India nel VI sec. d.C.).

Questi numeri si possono rappresentare su una semiretta, hanno un primo termine ma proseguono all'infinito. Sono un **insieme discreto** cioè fra due numeri naturali consecutivi non ci sono altri elementi.

Che ci siano **infiniti numeri naturali** non c'è alcun dubbio: non è possibile trovare il numero naturale più grande di tutti (vedi allegato del racconto di Zavattini).

Nell'insieme dei naturali che indicheremo con N si possono fare due operazioni restando all'interno dell'insieme: la somma e la moltiplicazione. La somma e il prodotto di due numeri naturali ha sempre come risultato un numero naturale. Non è così per la sottrazione ($3 - 5 = -2$) e men che mai per la divisione..

Le proprietà dell'addizione e della moltiplicazione sono tre:

a) proprietà **commutativa** $2 + 3 + 5 = 5 + 2 + 3$ $3 \cdot 5 \cdot 6 = 5 \cdot 6 \cdot 3$
b) proprietà **associativa** $(3 + 4) + 7 = 3 + (4 + 7)$ $(2 \cdot 5) \cdot 4 = 2 \cdot (5 \cdot 4)$
c) proprietà **distributiva** della moltiplicazione rispetto alla somma $3 \cdot (4 + 7) = 3 \cdot \$ + 3 \cdot 7$

I numeri naturali sembrano un insieme “innocuo”. In realtà ci sono molte proprietà interessanti che li riguardano, parecchie delle quali sono ancora semplicemente delle ipotesi (o congetture) perché non sono ancora state dimostrate. C'è un'intera branca della matematica detta “Teoria dei numeri” che se ne occupa. Le proprietà dei naturali sono alla base ad esempio dei moderni sistemi di crittografia a chiave pubblica. Qui di seguito vedremo alcuni numeri o ipotesi “interessanti”

1) Numeri **pari** e **dispari**. Detto n un qualunque numero naturale indicheremo con la scrittura $2n$ (cioé $2 \cdot n$) i numeri pari (infatti se moltiplico qualunque naturale per 2 ottengo un numero pari) e con $2n + 1$ i numeri dispari (se aggiungo 1 a qualunque numero pari ottengo un dispari). Una domanda che ci possiamo porre e a cui cercheremo di rispondere nelle puntate successive è **se ci siano più pari o più dispari**. Oppure **più pari o più naturali.**
2) Numeri **primi**. Sono considerati numeri primi quelli che hanno solo due divisori distinti: 1 e il numero stesso. Sono numeri primi 2 – 3 – 5 – 7 – 11 – 13 – 17 – 19 – 23 – 29 – 31 …..
E' lecito chiedersi se i numeri primi siano infiniti anche perché progressivamente diminuiscono in percentuale. *Tra 1 e 100 ci sono 25 numeri primi, ma nell'intervallo tra 1 e 1000 la loro percentuale scende al 16% e addirittura al 10% se si considerano tutti i numeri tra 1 e 100.000.* C'è una dimostrazione del fatto che sono infiniti che risale ai IV secolo a.C. da parte di Euclide. Si **ragiona per assurdo**; si nega cioè la tesi e se si arriva ad una contraddizione vuol dire era sbagliato negare la tesi per cui essa risulta vera.
Tesi: i numeri primi sono infiniti. Neghiamo la tesi e quindi partiamo dall'idea che i numeri primi siano finiti. Ma se sono finiti allora ci sarà un numero primo che chiameremo N più grande di tutti gli altri. Costruiamo il seguente numero $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots \cdot N + 1$.
Tale numero non è divisibile né per 2 (essendo dispari) né per 3, né per 5 …. in quanto tali divisioni hanno sempre 1 come resto. Quindi o è primo oppure c'é un numero primo più grande di N. Quindi N non è il numero primo più grande di tutti. Di qui una contraddizione.

Ne consegue che la tesi era vera e quindi **i numeri primi sono infiniti.**

3) **Numeri primi gemelli.** Sono numeri primi che hanno differenza 2. Ad esempio sono numeri primi gemelli 3 e 5, 5 e 7, 11 e 13, 17 e 19, 29 e 31 …... I numeri primi gemelli sono infiniti ? Questa ipotesi (congettura) è *probabilisticamente vera* ma non è mai stata dimostrata matematicamente e quindi rimane una congettura.
4) **Congettura di Golbach** (1742). Ogni numero pari maggiore di 2 si può scrivere in almeno un modo come somma di due numeri primi
   Ad esempio $4 = 2 + 2$ $6 = 3 + 3$ $8 = 3 + 5$ $10 = 3+ 7 = 5 + 5$
   $12 = 5 + 7$ $14 = 3 + 11 = 7 + 7$ $16 = 3 + 13 = 5 + 11$ etc.
   Ebbene tale proprietà rimane a tutt'oggi una congettura ed è a disposizione un premio di un milione di dollari offerti dall'editore britannico Tony Faber per chi riuscisse a dimostrarla.
5) **Numeri perfetti**. Un numero naturale n è detto perfetto se la somma dei suoi divisori propri (compreso l'1 ma escluso il numero stesso) ha per somma n
   Ad esempio il primo numero perfetto è 6; infatti i divisori propri di 6 sono 1, 2, 3 che sommati $1 + 2 + 3$ danno proprio 6. Il secondo numero perfetto è 28. Infatti i divisori di 28 sono 1 – 2 – 4 – 7 – 14 che sommati danno 28. Il terzo numero perfetto è 496 i cui divisori sono 1 – 2 – 4 – 8 – 31 – 16 – 62 – 124 – 248 la cui somma dà 496. I numeri perfetti sono infiniti ? Anche questa è una congettura. Al momento attuale ne sono stati trovati 52 e il più grande ha 82048639 cifre; tutti terminano con 6 o con 8.
6) A questo punto una domanda a cui io non so rispondere. Come è possibile che un oggetto creato dall'uomo, con delle regole costruttive chiare, i cui elementi sono tutti noti contenga delle proprietà che non siamo in grado di dimostrare ? Il matematico Kurt Gödel ha dimostrato come ogni sistema che permette di definire i numeri naturali è per forza incompleto: contiene cioé affermazioni che non sono dimostrabili; a parte la complicata dimostrazione rimane un senso di amaro in bocca nello scoprire che un oggetto apparentemente così “naturale” sia in realtà pieno di misteri
7) Un tentativo di ricondurre l'insieme N infinito ad un insieme finito lo abbiamo visto lo scorso anno quando, nell'ambito della crittografia, abbiamo esaminato l'aritmetica modulare che indicheremo con l'operatore mod. Si sceglie un numero a caso (meglio se primo). Per ogni numero naturale prendiamo in considerazione il resto delle divisione per il numero scelto.
   Ad esempio se scegliamo il 5 avremo
   0 mod 5 = 0 1 mod 5 = 1 2 mod 5 = 2 3 mod 5 = 3 4 mod 5 0 4
   5 mod 5 = 0 6 mod 5 = 1 7 mod 5 = 2 8 mod 5 = 3 9 mod 5 0 4 etc.
   Quindi tutti i numeri naturali si possono “inscatolare” in 5 contenitori numerati da 0 a 4. Anche le operazioni somma e prodotto daranno sempre numeri compresi tra 0 e 4 con le seguenti regole
   $(a + b) \bmod n = (a \bmod n + b \bmod n) \bmod n$
   esempio $(9 + 23) \bmod 5 = (9 \bmod 5 + 23 \bmod 5) \bmod 5 = (4 + 3) \bmod 5 = 7 \bmod 5 = 2$
   $(a \cdot b) \bmod n = (a \bmod n \cdot b \bmod n) \bmod n$
   esempio $(9 \cdot 9) \bmod 5 = (9 \bmod 5 \cdot 9 \bmod 5) \bmod 5 = (4 \cdot 4) \bmod 5 = 16 \bmod 5 = 1$