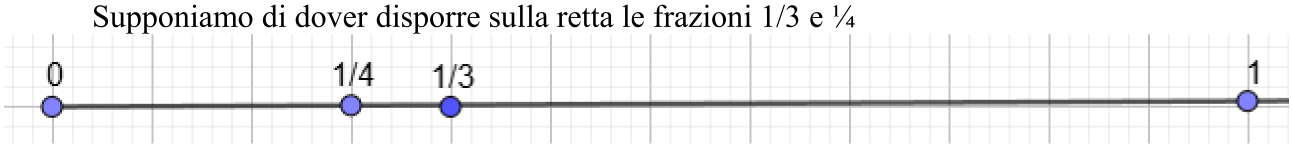
2° incontro

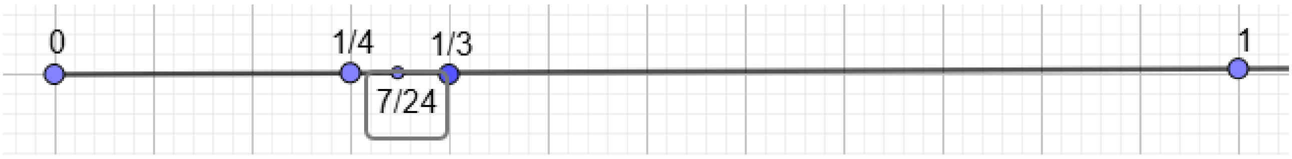
1) Numeri interi o relativi cioè dotati di segno Z. Vengono disposti su una retta illimitata quindi nei due versi non esiste l'ultimo elemento e non esiste neppure il primo. E' possibile fare anche delle sottrazioni che sono una operazione interna.
   Le **regole per fare le addizioni/sottrazioni** con i numeri interi sono le seguenti:
   a) se due numeri hanno lo stesso segno si sommano e si mantiene il segno
   b) se due numeri sono di segno opposto si sottraggono e si mantiene il segno del più grande in valore assoluto (indipendentemente dal segno)
   Per determinare il segno di una moltiplicazione di due o più numeri interi basta contare quanti segni meno ci sono: se il loro numero è pari il risultato sarà positivo, se sono dispari il risultato sarà negativo.
   La **proprietà della sottrazione è detta invariantiva**: sommando o sottraendo lo stesso numero ai due termini di una sottrazione il risultato non cambia
   <u>I relativi sono un insieme discreto ? Ci sono più numeri interi o numeri naturali</u> ?
2) Numeri frazionari o razionali Q. E' possibile fare anche le divisioni (non per 0). La regola per dividere due frazioni e di moltiplicare la prima per il reciproco della seconda (per la seconda capovolta.
3) Frazioni equivalenti: sono frazioni ottenute dividendo o moltiplicando numeratore e denominatore per lo stesso numero (**proprietà invariantiva della divisione**)
   Ad esempio $\frac{32}{48}=\frac{16}{24}=\frac{8}{12}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ ridotta ai minimi termini
   A che tipo di numeri danno origine le frazioni ?
   $\frac{12}{4}=3$ $\quad$ $\frac{3}{2}=1{,}5$ $\quad$ $\frac{1}{3}=0{,}\overline{3}$ $\quad$ $\frac{5}{6}=0{,}8\overline{3}$
   Come si vede dagli esempi si possono ottenere numeri interi, decimali finiti o limitati oppure decimali periodici semplice o misti. Ma sarà sempre così ?
   Ricordando che in una divisione il numero possibile di resti è limitato (ad esempio se divido per 7 posso avere resto 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) necessariamente da un certo punto in poi tali resti sono destinati a ripetersi e a quel punto comincia il periodo.
   Siccome è sempre possibile passare da una frazione a un numero ci chiediamo come si può passare da un numero alla frazione che lo ha generato (cioè come passare dal risultato alla divisione più semplice che lo ha prodotto) Qui sotto è illustrata la procedura che permette tale passaggio
   $x=1,\overline{3}$ $\quad$ $10\text{x}=13,\overline{3}$ $\quad$ $10\text{x}-x=13,\overline{3}-1,\overline{3}$ $\quad$ $9\text{x}=12$ $\quad$ $x=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$ per. semplice
   $x=1{,}2\overline{3}$ $\quad$ $100\text{x}=123,\overline{3}$ $\quad$ $10\text{x}=12,\overline{3}$ $\quad$ $100\text{x}-10\text{x}=123,\overline{3}-12,\overline{3}$ $\quad$ $90\text{x}=111$

   $x=\frac{111}{90}=\frac{37}{30}$ periodico misto

4) Per visualizzare la periodicità dei numeri razionali si può osservare il comportamento di una pallina da biliardo su un tavolo da gioco rettangolare. Supponendo che rotoli senza attrito sul panno e rimbalzi perfettamente sui bordi. Se viene colpita in modo da iniziare il movimento in una direzione che forma un angolo razionale rispetto ai lati del tavolo, la pallina si muove infatti lungo un percorso periodico, e viceversa (a meno che non finisca in un angolo).
5) Per disporre in ordine le frazioni su una retta o le si trasforma in decimali più facili da ordinare o occorre fare in modo che abbiano lo stesso denominatore.
   Supponiamo di dover disporre sulla retta le frazioni 1/3 e ¼



E' possibile inserire un'altra frazione fra ¼ e 1/3? Certamente. Possiamo farlo o ricorrendo ai decimali (1/3 = 0,333.., ¼ = 0,25 per cui il numero 0,3 cioè la frazione 3/10 sta fra le due indicate) oppure facendo la media tra le due frazioni cioè sommandole e dividendo per 2 (si ottiene così 7/24 che sta esattamente a metà) o con altri metodi ancora.



Naturalmente si può procedere allo stesso modo per trovare una frazione che stia tra 7/24 e 1/3 oppure fra ¼ e 7/24. Siccome il procedimento può continuare … all'infinito vuol dire che tra due frazioni qualsiasi ce ne sono infinite altre. L'insieme dei numeri razionali Q non è quindi discreto ma viene definito denso.

6) Ogni frazione corrisponde a un punto; è lecito chiedersi se ogni punto corrisponde ad una frazione. Riprenderemo questo discorso nel prossimo incontro
7) Torniamo ai numeri periodici e proviamo a scriverli in un altro modo con la notazione decimale
8) $1,\overline{2}=1+\frac{2}{10}+\frac{2}{100}+\frac{2}{1000}+\frac{2}{10000}\text{..........}$

   Quindi il numero periodico $1,\overline{2}$ che corrisponde alla frazione 11/9 quindi ad un valore ben determinato e finito si può esprimere come la somma di infiniti numeri. Tale somma prende in matematica il nome di serie. A prima vista sembrerebbe che la somma di infinite numeri non possa avere come risultato un numero, ma abbiamo appena scoperto che non sempre è così. Condizione necessaria perché ciò avvenga e che i numeri che si sommano siano sempre più piccoli; nel nostro caso 2 centesimi sono la decima parte di 2 decimi e così via. **Attenzione:** questa condizione necessaria non è però sufficiente. Negli incontri che verranno faremo vedere come ci siano somme di infiniti numeri via via più piccoli che crescono in maniera incontrollata o, come si dice in linguaggio matematico, che sono divergenti
9) Prendiamo ora in esame un numero interessante cioè $1,\overline{9}$. Se tentiamo di utilizzare il metodo che abbiamo visto per trasformarlo in frazione otterremo un risultato imprevisto

   $x = 1,\overline{9}$ $\quad 10x = 19,\overline{9}$ $\quad 10x - x = 19.\overline{9} - 1,\overline{9}$ $\quad 9x = 18$ $\quad x = 2$

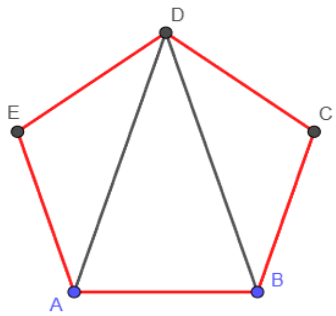
   Abbiamo quindi scoperto che $1,\overline{9} = 2$ e questo accade per qualunque numero con periodo 9. Questo equivale a dire che la serie

   $1,\overline{9}=1+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10000}\text{..........}$ converge a 2 cioè ha per somma 2.

   Questo fatto cioè che ci siano numeri che si possono scrivere in due modi diversi ha un po' turbato le menti dei matematici.
10) La periodicità cioè il ripetersi di cifre o gruppi di cifre suggerisce un collegamento con la geometria, con quello che si chiama tassellatura (o tassellazione) cioè il ricoprimento di una superficie potenzialmente infinità con dei moduli di figure geometriche (e non) che si ripetono sempre uguali. Noi ci accontenteremo di tassellature formate da un unico poligono regolare o da più poligoni regolari ma la fantasia (vedere le slides di Escher) in questo campo produce degli autentici capolavori.

    I poligoni regolari (cioè che hanno i lati e gli angoli tutti congruenti cioè uguali) sono il triangolo equilatero, il quadrato, il pentagono regolare, l'esagono regolare, etc.

Per capirne di più è necessario che impariamo a calcolare il valore degli angolinterni di ogni poligono regolare. Noi sappiamo già (o dovremmo sapere) che la somma degli angoli interni di un triangolo vale 180°. Quindi ogni angolo interno di un triangolo equilatero vale 60°



(180° : 3 = 60°). Per il quadrato non abbiamo problemi essendo tutti angoli retti cioè di 90°. Vediamo come si calcola il valore di ogni angolo interno di un pentagono. Uniamo un vertice con gli altri due non adiacenti (tracciamo cioè le diagonali da un vertice). Otteniamo 3 triangoli. La somma degli angoli interni dei tre triangoli è la stessa della somma degli angoli interni del pentagono. Quindi la somma degli angoli interni del pentagono vale 180° · 3 = 540; essendo tutti gli angoli congruenti basterà fare 540° : 5 = 108°

Con un esagono i triangoli risultano essere 4 (6-2) e quindi ogni angolo dell'esagono misurerà (180° · 4) : 6 = 120°. Per l'ottagono si avrà (180° · 6) : 8 = 135°. Infine per il dodecagono (180° · 10) : 12 = 150°

Questo spiega perché se voglio usare solo un tipo di poligoni regolari potrò usare triangoli mettendone 6 a confluire nello stesso vertice (60° · 6 = 360°) oppure quadrati mettendone 4 col vertice in comune o infine esagoni facendone uscire 3 da ogni vertice. Non posso usare pentagoni perché se ne metto 3 per vertice non arrivo a completare l'angolo giro (108° · 3 = 324°) e la stessa considerazione vale per qualunque altro poligono regolare con più di 6 lati.
Se decido di utilizzare 2 o più poligoni regolari non tutti uguali le possibilità che ho portano agli 8 tipi di tassellatura che sono illustrati nelle slides.